

**Complément du professeur André Dubey
au séminaire sur l'Asset/Liability Management**

Ecole des HEC
Université de Lausanne

Asset-Liability Management : quelques remarques en complément du séminaire

ALM (Asset-Liability Management ou Gestion Actifs-Passifs) est une expression qui est actuellement très à la mode. Des publications nombreuses traitent de ce sujet, c'est un des thèmes favoris des séminaires organisés par les entreprises de consultance pour leurs clients et plusieurs logiciels sont proposés sur le marché. Il est toutefois difficile de trouver de la littérature présentant le sujet d'une manière structurée. Les publications traitant d'ALM sont en effet souvent des documents de nature plutôt publicitaire, présentant et incitant à acheter des services ou des logiciels. Le séminaire de Monsieur Langmeier est une très bonne synthèse d'articles consacrés à ce sujet. Ces notes sont un complément à ce séminaire.

1. Introduction

La SOA (Society of Actuaries, c'est-à-dire Association des actuaires aux USA) donne la définition suivante pour ALM :

ALM is the practice of managing a business so that decisions on assets and liabilities are coordinated ; it can be defined as the ongoing process of formulating, implementing, monitoring, and revising strategies related to assets and liabilities in an attempt to achieve financial objectives for a given set of risk tolerances and constraints.

Toutes les activités commerciales sont en principe concernées par l'ALM. Dans la pratique, ce sont naturellement les banques et tout particulièrement les institutions d'assurance ainsi que les caisses de pension qui sont le plus directement intéressés par des méthodes ALM. Dans une institution d'assurance par exemple, les fonds propres dont dispose l'institution ne représentent qu'un pourcentage relativement faible des actifs et des passifs portés au bilan. Toute variation des actifs aura donc une importance primordiale sur les résultats et l'équilibre financier de l'institution. Il faut toutefois remarquer une différence importante au niveau des *financial objectives* entre les méthodes ALM appliquées aux institutions d'assurances et celles appliquées aux caisses de pension, différence due à l'origine anglo-saxonne de ces méthodes :

- Dans les méthodes appliquées à une compagnie d'assurance, les objectifs financiers sont généralement définis en terme d'exigence de solvabilité ou en terme de return on equity, c'est-à-dire de rendement sur l'investissement.
- Aux USA, les caisses de pensions sont rattachées beaucoup plus directement à l'entreprise que ce n'est le cas en Suisse. L'entreprise est directement responsable des engagements de la caisse. La solvabilité de la caisse de pension est donc directement liée à celle de l'entreprise-mère. Dans les méthodes américaines d'ALM appliquées aux caisses de pensions, les objectifs financiers sont donc plutôt définis en terme de minimisation des coûts de la caisse à la charge de l'entreprise. Il est bien évident que ces objectifs ne sont pas nécessairement adaptés au système suisse, dans lequel la responsabilité de l'entreprise-mère se limite juridiquement au paiement de sa part des cotisations.

Dans sa définition, la SOA fait également la remarque suivante :

ALM means different things to different people : it can mean duration and convexity matching, immunization, optimisation, performance management and measurement, risk management and so on.

Il est incontestable qu'il existe un effet de mode en relation avec l'ALM. Il en résulte que des méthodes appliquées depuis longtemps et connues sous un nom spécifique sont aujourd'hui proposées sous la désignation « Asset-Liability Management ».

2. ALM au sens historique de « Congruence Actifs-Passifs »

Historiquement, le terme Asset-Liability Management a d'abord été utilisé en assurance au sens de « Congruence des échéances entre les passifs et les actifs ». Les méthodes appliquées dans ce contexte sont par exemple les méthodes d'immunisation ou celles de Cash Flow Matching discutées dans le rapport de séminaire. Si le bilan d'une institution d'assurances est en équilibre, la valeur actualisée des actifs est égale à la valeur actualisée des passifs. Si les échéanciers de ces deux flux financiers ne sont pas identiques, cet équilibre peut être rompu à la suite de l'évolution des marchés financiers par exemple. Comment faut-il structurer les placements pour être protégé le mieux possibles contre de telles évolutions ?

A titre d'illustration, nous discutons le modèle classique d'immunisation contre une variation des taux d'intérêt. Nous supposons qu'une institution d'assurance gère un flux de passifs L (pour Liabilities) et un flux d'actifs A (pour Assets). Nous supposons que ces deux flux sont déterministes. Pour chacun de ces deux flux, nous considérons la valeur actualisée au temps $t=0$ par rapport à un taux d'intérêt instantané δ supposé constant :

$$\begin{array}{ll} \text{Asset} & A(\delta) = \sum_j \exp(-\delta t_j) A_j \\ \text{Liability} & L(\delta) = \sum_k \exp(-\delta t_k) L_k \end{array}$$

A_j , respectivement L_k , représente l'encaissement, respectivement le décaissement, qui sera effectué au temps t_j , respectivement t_k .

$$\text{Surplus} \quad S(\delta) = A(\delta) - L(\delta)$$

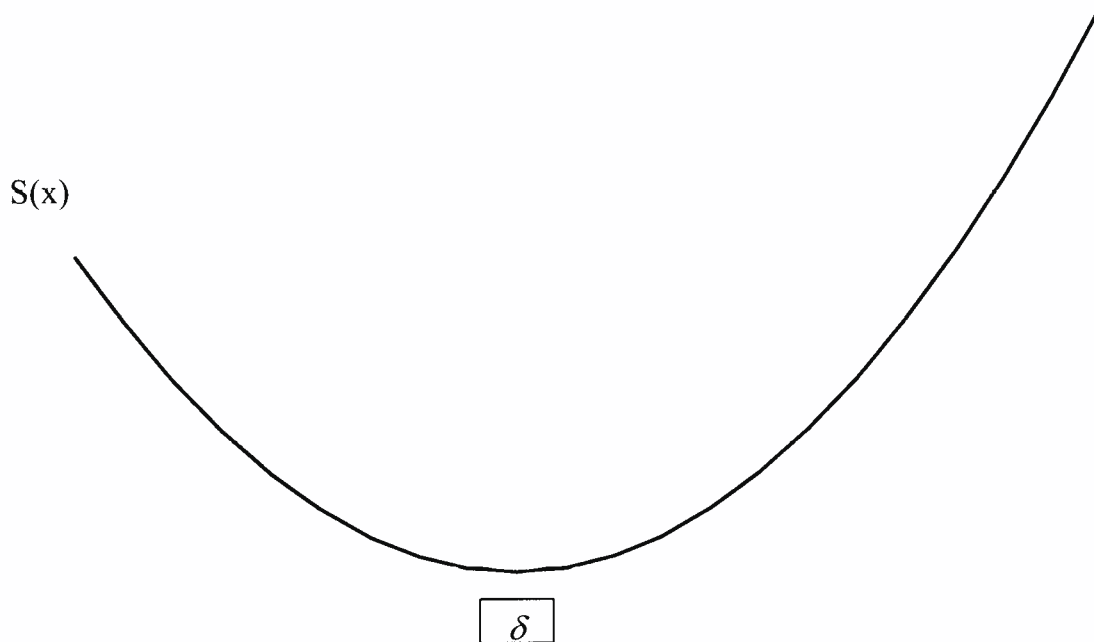
La condition d'équilibre du bilan exige que

$$S(\delta) = 0 \tag{1}$$

Pour le taux d'évaluation choisi δ . Si ce taux d'intérêt varie et devient par exemple $\delta + \Delta\delta$, l'équilibre peut être rompu. La situation idéale est celle dans laquelle

$$S(\delta + \Delta\delta) \geq 0 \quad \text{pour n'importe quelle petite variation } \Delta\delta.$$

Dans un tel cas, on dit que les flux sont immunisés contre une variation du taux d'intérêt. Cette situation correspond à celle de la figure suivante : la fonction $S(x)$ doit avoir un minimum local en δ avec $S(\delta) = 0$.



Les conditions nécessaires et suffisantes pour cette situation sont donc :

$$S(\delta) = 0 \quad (1) \qquad \frac{d}{dx} S(\delta) = 0 \quad (2) \qquad \frac{d^2}{dx^2} S(\delta) \geq 0 \quad (3)$$

c'est-à-dire

$$A(\delta) = L(\delta) \quad (1) \qquad \frac{d}{dx} A(\delta) = \frac{d}{dx} L(\delta) \quad (2) \qquad \frac{d^2}{dx^2} A(\delta) \geq \frac{d^2}{dx^2} L(\delta) \quad (3)$$

La première condition (1) est la condition d'équilibre du bilan. Les deux autres conditions peuvent être exprimées en fonction de concepts qui peuvent être interprétés en finance, la duration et la dispersion d'un flux financier.

La condition (2) signifie :

$$\sum_j t_j \exp(-\delta t_j) A_j = \sum_k t_k \exp(-\delta t_k) L_k \quad (2)$$

En divisant par $A(\delta)$, respectivement $L(\delta)$ supposés égaux selon la condition (1), on obtient :

$$\frac{\sum_j t_j \exp(-\delta t_j) A_j}{\sum_j \exp(-\delta t_j) A_j} = \frac{\sum_k t_k \exp(-\delta t_k) L_k}{\sum_k \exp(-\delta t_k) L_k} \quad (2)$$

En d'autres termes, la **duration** $DA(\delta)$, respectivement $DL(\delta)$, des deux flux financiers doit être identique. La duration d'un flux financier est la moyenne pondérée des échéances de chacun des paiements, moyenne pondérée par des facteurs proportionnels à la valeur actualisée des paiements. Elle est de même nature qu'une espérance mathématique de la durée du flux, où la probabilité de chaque paiement serait proportionnelle à la valeur actualisée du paiement. On obtient donc

$$DA(\delta) = DL(\delta) \quad (2)$$

La condition (3) peut être exprimée de la manière suivante :

$$\sum_j t_j^2 \exp(-\delta t_j) A_j \geq \sum_k t_k^2 \exp(-\delta t_k) L_k \quad (3)$$

Nous supposons que les conditions (1) et (2) sont remplies. En soustrayant $DA(\delta)^2$, respectivement $DL(\delta)^2$, de chaque côté de l'équation et en divisant par $A(\delta)$, respectivement $L(\delta)$, on obtient :

$$\frac{\sum_j (t_j - DA(\delta))^2 \exp(-\delta t_j) A_j}{\sum_j \exp(-\delta t_j) A_j} \geq \frac{\sum_k (t_k - DL(\delta))^2 \exp(-\delta t_k) L_k}{\sum_k \exp(-\delta t_k) L_k} \quad (3)$$

c'est-à-dire que la **dispersion** du flux des actifs $SA(\delta)$ doit être supérieure à celle du flux des passifs $SL(\delta)$. La dispersion d'un flux est la moyenne pondérée des différences entre les échéances des paiements et la duration, différence élevée au carré, moyenne pondérée par des facteurs proportionnels à la valeur actualisée des paiements. Par analogie, la dispersion correspond à la variance de la durée d'un flux financier, si les probabilités de chaque paiement étaient proportionnelles à leur valeurs actualisée. On obtient donc

$$SA(\delta) \geq S(\delta)$$

Les conditions d'immunisation peuvent donc être exprimée de la manière suivante :

- (1) Les actifs et les passifs doivent avoir la même valeur actualisée
- (2) La duration des deux flux doit être identiques
- (3) La dispersion des actifs doit être supérieure à celle des passifs.

Il est bien évident que, dans la pratique, les flux ne peuvent pas être complètement immunisés. Dans le modèle très simple considéré, nous n'avons pas tenu compte de la structure des taux d'intérêt (le taux varie en fonction des échéances), de la nature stochastique des flux (les paiements et les échéances ne sont pas connus d'une manière déterministe) et surtout de la nature statique du modèle : il ne suffit pas d'immuniser à un moment donné, il faudrait le faire d'une manière dynamique.

3. Un concept moderne de l'ALM : Integrated Risk Management

Si les premières méthodes historiques de l'ALM étaient limitées à des études de congruence des échéances des actifs et des passifs, le concept est utilisé aujourd'hui dans un contexte beaucoup plus général. Comme le dit la définition de la SOA, l'ALM comprend l'ensemble de toutes les méthodes d'aide à la décision tenant compte d'une manière coordonnée des conséquences de ces décisions sur les passifs aussi bien que sur les actifs. Comment expliquer la popularité actuelle de ces méthodes auprès des praticiens, l'effet de mode dont jouit la notion d'ALM ? Différentes raisons peuvent être avancées, raisons que nous allons discuter dans ces paragraphes.

3.1 Prise en compte des corrélations entre les risques de l'assurance

Nous avons considéré dans le chapitre précédent l'effet d'une variation des taux d'intérêt sur l'équilibre financier d'une institution d'assurances. Il est bien évident qu'une telle variation aura d'autres conséquences importantes sur les résultats de l'institution, conséquences qui ne sont pas prises en compte dans le modèle discuté. Par exemple :

- Une variation des taux d'intérêt aura une influence sur les valeurs boursières des actifs, des actions et des obligations.
- Elle influencera également la valeur des actions de l'institution elle-même et donc son attractivité auprès des investisseurs.
- En assurance sur la vie, une variation des taux d'intérêt influencera aussi bien le volume des acquisitions nouvelles que le taux de résiliation des contrats en cours. A la suite d'un changement des taux, l'investissement dans une police d'assurance deviendra plus ou moins attractif pour l'assuré.
- En assurance non-vie, une variation des taux d'intérêt aura une influence sur les taux d'inflation et donc sur le montant des prestations que devra fournir l'institution d'assurances.
- L'impact d'une variation des taux sur le renchérissement influencera également l'évolution des frais administratifs de l'institution.
- Etc., etc., etc.

Quel sera l'influence d'une variation des taux d'intérêt sur le résultat global de l'institution pour un horizon de temps donné ? C'est le type de questions auxquelles devrait répondre une méthode d'ALM.

La prise en compte des corrélations entre les divers risques propres à l'assurance augmente l'intérêt pour les méthodes qui, comme l'ALM, ont pour objectif une analyse globale et intégrée des résultats.

3.2 Nouvelles formulations des objectifs commerciaux imposés à l'assureur

Il y a quelques décennies, le responsable d'une institution d'assurances devait essentiellement veiller à ce que la solvabilité de l'institution soit garantie et à ce que sa part de marché soit si possible croissante. Dans un marché partiellement cartellisé, une augmentation de la production signifiait presque automatiquement une augmentation à terme des bénéfices. Dans un tel contexte, il suffisait de définir les objectifs et d'analyser les résultats par fonction : actuariat, finance, réseau de vente, etc.

Aujourd'hui, une institution privée d'assurances est soumise d'une part à une concurrence beaucoup plus intense que par le passé et d'autre part à la pression des marchés financiers qui exigent que la « Share Holder Value » de l'institution, la valeur pour les actionnaires, soit optimisée et que le « Return on Equity », les rendements sur les investissements, correspondent aux attentes des investisseurs. Ces exigences imposent une définition des objectifs commerciaux ainsi qu'une analyse des résultats à la fois plus globale et plus détaillée que par le passé. Le responsable de l'institution va projeter ces mêmes objectifs sur les responsables des « Business Units », des unités et des départements de l'institution, qui ne sont en général plus définis en terme de fonction mais en terme de segments de marché. Du haut en bas de la hiérarchie, l'intérêt pour des méthodes ALM, c'est-à-dire des méthodes analysant l'impact global sur les résultats d'une décision ou d'un changement est donc croissant.

3.3 Développement de l'informatique

Dans ce contexte, le développement et l'amélioration des moyens informatiques a de toute évidence joué un rôle essentiel. Les méthodes ALM dans le sens moderne du terme consistent en général à simuler l'évolution future des résultats sur la base d'un modèle mathématique approprié. De telles méthodes exigent en général des moyens informatiques importants.

Voici à mon sens les principales raisons qui contribuent à la popularité des méthodes ALM, respectivement au fait de « vendre » sous le label ALM des méthodes bien connues auparavant. Il faut en effet remarquer que, comme le souligne le rapport de séminaire, l'ALM reprend très souvent des méthodes bien connues de l'actuariat ou de la gestion financière et les applique dans un contexte Asset-Liability. Nous allons voir dans le prochain chapitre une illustration d'une telle application.

4. Illustration : Portefeuille optimal au sens de Markovitz et ALM

Dans ce chapitre, nous montrons à titre d'illustration comment une méthode bien connue de la gestion financière peut être adaptée dans un contexte ALM. Nous supposons qu'une institution d'assurances ou une caisse de pension doit investir un capital donné pendant une période d'incertitude. Il existe $n+1$ types de placement possibles dont les taux de rendement pour la période considérée sont des variables aléatoires. Quels sont les portefeuilles qui permettent d'obtenir un taux de rendement espéré maximal pour une volatilité (c'est-à-dire un écart-type du taux de rendement) minimal.

On pose :

$W(0)$	le capital à investir au temps $t = 0$
$r(0), R(1), \dots, R(n)$	les taux de rendement des $n+1$ actifs à disposition. Nous supposons que l'actif 0 est un actif sans risque avec taux de rendement $r(0)$ déterministe. Les $R(k)$ sont des variables aléatoires, les actifs correspondant sont des actifs risqués..
$x = \{x(0), x(1), \dots, x(n)\}$ avec $x(0) + x(1) + \dots + x(n) = 1$	représente un portefeuille. $x(k)$ représente la proportion de l'actif k dans le portefeuille sélectionné
$R(x)$	le taux de rendement du portefeuille.
$W(1)$	la valeur du portefeuille au temps $t = 1$.

On obtient :

$$W(1) = \left(x(0)(1+r(0)) + \sum_{k=1}^n x(k)(1+R(k)) \right) W(0) = (1+R(x))W(0)$$

$$R(x) = x(0)r(0) + \sum_{k=1}^n x(k)R(k) = r(0) + \sum_{k=1}^n x(k)(R(k) - r(0))$$

L'objectif de l'institution est de sélectionner un portefeuille tel que

$$\begin{aligned} E[R(x)] & \text{ le taux de rendement espéré soit le plus élevé possible} \\ \text{Var}[R(x)] & \text{ la variance du taux de rendement soit la moins élevée possible} \end{aligned}$$

Les portefeuilles optimaux au sens de Pareto sont alors, comme nous l'avions vu précédemment, ceux qui maximisent une expression de la forme :

$$k_1 E[R(x)] - k_2 \text{Var}[R(x)] \quad \text{avec des constantes } k_1 \text{ et } k_2 \text{ positives.}$$

Comme il n'y a que deux critères, on peut supposer que l'une des constantes est égale à 1. Les portefeuilles optimaux au sens de Pareto sont donc les x tels que

$$k E[R(x)] - \text{Var}[R(x)] \text{ est maximal} \quad \text{pour une constante } k > 0 \quad (4)$$

En principe, il existe pour chaque constante positive k un tel portefeuille.

On peut résoudre explicitement ce problème d'optimisation et on obtient le résultat suivant :

Soient

$$\bar{\pi} = \begin{pmatrix} E[R(1)] - r(0) \\ \dots \dots \dots \\ E[R(n)] - r(0) \end{pmatrix} \quad \text{vecteur de dimension } n$$

$$V = \begin{pmatrix} \text{Cov}(R(1), R(1)) & \dots & \dots & \dots & \text{Cov}(R(1), R(n)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Cov}(R(n), R(1)) & \dots & \dots & \dots & \text{Cov}(R(n), R(n)) \end{pmatrix} \quad \text{matrice de dimension } n \times n$$

$$\bar{a} = V^{-1} \bar{\pi} \quad \text{le vecteur-colonne obtenu en multipliant le vecteur des taux de rendement excédentaires espérés avec l'inverse de la matrice de covariance}$$

$$\bar{x} = (x(1), \dots, x(n))^T \quad \text{le vecteur-colonne représentant les proportions des actifs risqués dans le portefeuille optimal.}$$

$$x(0) = 1 - \sum_{j=1}^n x(j)$$

La solution de (4) peut alors s'écrire de la manière suivante :

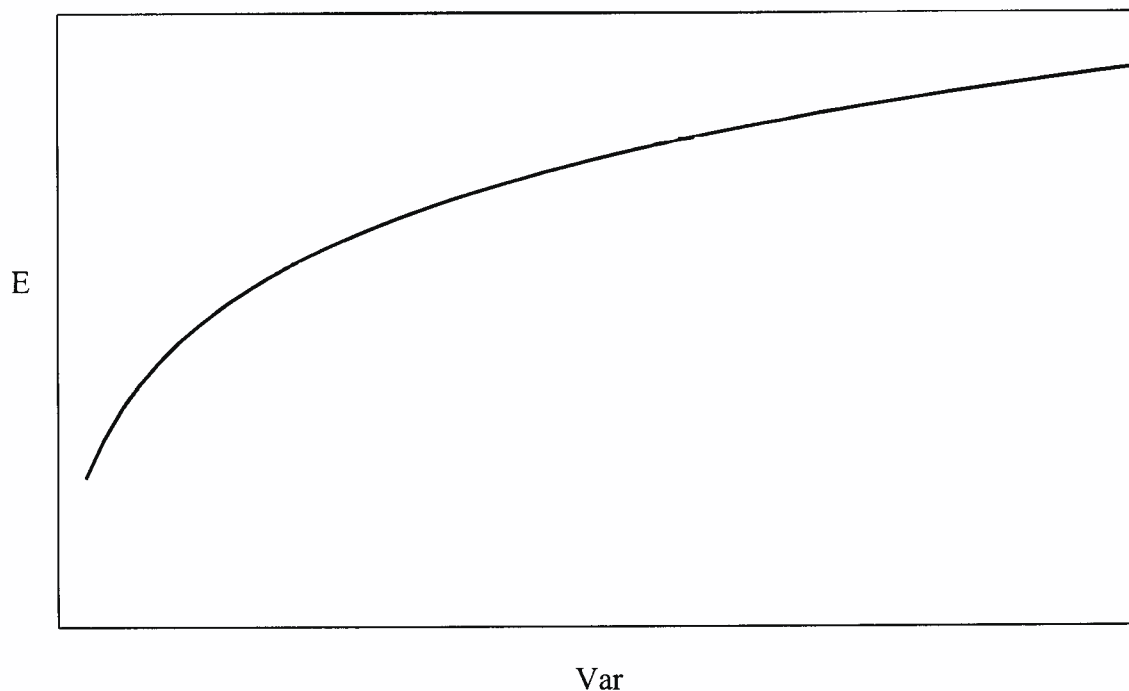
$$\bar{x} = \frac{1}{2} k \bar{a} \quad x(0) = 1 - \frac{1}{2} k \sum_{j=1}^n a_j$$

En d'autres termes, pour tous les portefeuilles optimaux, les proportions relatives entre les actifs risqués sont identiques. Ces proportions relatives sont données par le vecteur \bar{a} , c'est-à-dire par la matrice de covariance V des rendements risqués et par le vecteur des espérances de rendement excédentaires $\bar{\pi}$. Le seul degré de liberté est représenté par la constante positive k et définit la quantité relative d'actif sans risque à choisir dans le portefeuille :

- Plus k est élevé, plus l'espérance de rendement du portefeuille est élevée, mais plus la variance de ce rendement est également élevée.

- Moins k est élevé, moins l'espérance de rendement du portefeuille est élevée, mais la variance de ce rendement est également moins élevée.

Si on représente l'ensemble de ces portefeuilles optimaux sur un diagramme montrant la variance du rendement en abscisse et l'espérance de rendement en ordonnée, on obtient une courbe en fonction de la valeur de k , la frontière efficiente.



Cette méthode due à Markovitz nous donne l'ensemble des portefeuilles optimaux. Sharpe et Tint ont en 1990 généralisée cette méthode dans un contexte ALM :

On considère le même modèle que dans le cas précédent avec un capital $W(0)$ à investir et $n+1$ types de placements possibles. $W(0)$ représente maintenant la valeur des actifs au temps $t=0$. On a comme auparavant

$$\begin{array}{ll} R(x) & \text{Taux de rendement aléatoire du portefeuille } x. \\ W(1) = (1 + R(x))W(0) & \text{Valeur aléatoire des actifs au temps } t=1 \end{array}$$

On suppose qu'il existe d'autre part des passifs, des liabilities qui sont représentées par :

$$\begin{array}{ll} L(0) & \text{Valeur des liabilities au temps } t=0 \\ R(L) & \text{Taux aléatoire de croissance des liabilities} \\ L(1) = (1 + R(L))L(0) & \text{Valeur aléatoires de ces mêmes liabilities au temps } t=1. \\ S(0) = W(0) - L(0) & \text{Surplus au temps } t=0 \\ S(1) = W(1) - L(1) & \text{Surplus au temps } t=1 \end{array}$$

En posant

$$f(0) = \frac{W(0)}{L(0)} \quad \text{le degré de couverture des passifs par les actifs}$$

On obtient le taux de rendement suivant pour le surplus

$$R(S) = \frac{S(1) - S(0)}{W(0)} = R(x) - \frac{1}{f(0)} R(L)$$

L'idée de Sharpe et Tint consiste à appliquer la méthode de Markovitz sur le taux de rendement $R(S)$. Les portefeuilles x optimaux au sens de Pareto sont ceux pour lesquels

$$k E[R(S)] - \text{Var}[R(S)] = k E\left[R(x) - \frac{1}{f(0)} R(L)\right] - \text{Var}\left[R(x) - \frac{1}{f(0)} R(L)\right]$$

est maximal pour une constante k positive

En développant la variance et en éliminant les termes qui ne dépendent pas de x (et donc n'influencent pas le maximum), on obtient finalement

Les portefeuilles optimaux sont ceux qui maximisent l'expression

$$k E[R(x)] - \text{Var}[R(x)] + 2 \frac{1}{f(0)} \text{Cov}(R(x), R(L)) \quad k > 0$$

La prise en compte des tau de croissance des passifs va donc influencer le choix du portefeuille x . Il s'agit typiquement d'une méthode ALM.

5. Stochastic Risk Modelling et simulations

Dans un grand nombre de cas, l'application d'une méthode ALM suivra le schéma suivant :

- Construction d'un modèle stochastique permettant de traiter le problème considéré.
- Estimation des distributions des variables aléatoires du modèle, des paramètres de ces distributions, pour autant que des données statistiques soient à disposition. En particulier, les estimations des corrélations entre les différentes variables peut exiger un travail statistique important.
- Test du modèle et de son adéquation avec la réalité. Dans la pratique, cette phase est très souvent négligée.
- Simulation des résultats sur la base du modèle. En général, les modèles considérés sont trop complexes pour permettre des calculs explicites. Les simulations sont alors la seule méthode possible permettant d'obtenir non seulement un résultat moyen, mais également la variabilité de ces résultats.